Metrické prostory - problémky k promyšlení

a) příklady metrik:

1. Zopakujme si definici metriky a metrického prostoru .
   Ukažme pak, že nezápornost metriky už plyne z ostatních axiomů v definici metriky.

2. Uvažujme prostory R^n a v nich metriky:
   $d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$, $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ (Euklidovská metrika) a
   $d_{\max}(x,y)=\max_k|x_k-y_k|$.
   Ověřme axiomy metrik $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$.

3. V prostoru $C[a,b]$ uvažujme metriky $d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ a $d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$
   a ověřme opět axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$ (u ověření axiomů u $d_1(f,g)$ budeme asi potřebovat některé vlastnosti určitého integrálu).

   Metrikou v prostoru $C[a,b]$ bude i $d_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Pokud se v prostoru $R[a,b]$ pokusíme a zavedení metriky $d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$, který axiom metriky nebude splněn? Umíte „upravit“ prostor $R[a,b]$ tak, aby $d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ byla už metrika?

5*. Zkuste dokázat , že v lineárním prostoru V se skalárním součinem $\langle u,v\rangle$ a normou $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ platí $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ (Cauchy - Schwarzova nerovnost) a dále pak ověřit platnost axiomů metriky, pokud v prostoru V definujeme metriku $d(u,v)=\|u-v\|$.

   Příklady : prostor R^n s euklidovskou metrikou, prostor $C[a,b]$ s metrikou $d_2(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx}$.

5. „Mechanické“ derivování:

Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu následujících funkcí (všude, kde existují) a ukažte, že smíšené derivace 2.řádu jsou záměnné:

a) $f(x,y) =:$ x^2+y ; $x^2 y$; $x\sqrt{y}+\frac{y}{x}$; e^{x^2-y} ; $e^{x^2 y}$; $e^{-\frac{x}{y}}$; x^y ; $\ln(xy-1)$; $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $arctg\frac{x+y}{x-y}$;

b) $f(x,y,z) =:$ $xy+yz+xz$; e^{xyz} ; $x^{\frac{y}{z}}$; $\arcsin(\frac{z^2}{x^2+y^2})$;

c) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (Laplaceova rovnice).

6. Diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln(y-x^2)$ je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1, 2, 0)$. Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně $\ln(1{,}99-(1{,}02)^2)$.

b) Určete, kde má funkce $f(x,y,z)=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$ diferenciál a diferenciál v těchto bodech určete.

c) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\frac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

d) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.